29

Rebond d'une goutte HPonts PC 2013

II.A.6. 4 syst : {patin de masse $m_p = 0$}

PFD : $m_p \vec{a} = m_p \vec{g} + \vec{F}_{ressort \to patin} + \vec{F}$

$\vec{0} = \vec{0} + \vec{F}_{res \to patin} + (-f \dot{e} \vec{u_z})$

$k(e - e_0) - f\dot{e} = 0 \Rightarrow \dot{e} - \frac{k}{f} e = -\frac{k}{f} e_0$

$e(t) = A \exp\left[\frac{k}{f} t\right] + e_0$

c.i. : $e(0) = e_0$, $A + e_0 = e_0$ $\Big\} \boxed{A = 0}$.

d'où $\boxed{e(t) = e_0}$

---

7. 5 Syst : masse m

Bdf : $\vec{F}_{res \to m} = -k(e - e_0)\vec{u_z} = \vec{0}$

Poids $= -mg\vec{u_z}$ et $\vec{F} = 0$ car $\dot{e} = 0$.

Seule force non nulle est le poids, déf$^{\circ}$ de la chute libre.

TEM : $E_m = C^{te}$ $\quad E_m(t=0) = E_m(t_0)$

$mg(h + e_0) + 0 = mg e_0 + \frac{1}{2} m v_0^2$

d'où $\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$ $\quad$ AN : $v_0 \simeq 1{,}4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

---

8. 4 Syst : masse m

Bdf : • $\vec{F}_{res} = -k(e - e_0)\vec{u_z} = -k\varepsilon \vec{u_z}$

• $\vec{P}$ négligé $\quad$ • $\vec{F} = -f\dot{\varepsilon}\vec{u_z}$ $\quad (\dot{\varepsilon} = \dot{e})$

accél$^{\circ}$: $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u_z} = (\ddot{Z} + \ddot{e})\vec{u_z}$, $\ddot{Z} = 0$ d'ap. énoncé, $\ddot{e} = \ddot{\varepsilon}$

PFD : $m\ddot{\varepsilon} = -k\varepsilon - f\dot{\varepsilon}$

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} + \frac{f}{m}\dot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = 0}$$

par identif$^{\circ}$: $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{f}{m}$ $\quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

d'où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ $\quad \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{f} = \frac{\sqrt{km}}{f}}$ 2

---

9. 5 Polyn. χ^{ic} : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left[\frac{1}{4Q^2} - 1\right] \sim -4\omega_0^2 < 0$

$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\, 2\omega_0\right]$ 2

d'où $\boxed{\varepsilon(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left[B\cos\omega_0 t + C\sin(\omega_0 t)\right]}$

$\boxed{\varepsilon(0) = e(t=0) - e_0 = 0}$

$\boxed{\dot\varepsilon(0) = \dot e(0) = -v_0}$ 1

d'où $\boxed{B = 0}$

$C\left[e^0 w_0 \cos(w_0 \times 0) + \left(-\frac{w_0}{2Q}\right) e^0 \sin(0)\right] = -v_0$

d'où $\boxed{C = -\frac{v_0}{w_0}}$ (unités ok!)

$$\boxed{\varepsilon(t) = e^{-\frac{w_0 t}{2Q}}\left(-\frac{v_0}{w_0}\right)\sin(w_0 t)}$$ 2

Rq : signe ok, car $e < e_0$ au cours écrasement goutte.

~~10. $T_0 = 0$ car état initial~~

10. [4] $w_0 T_n = n \times \pi + \frac{\pi}{2}$ pour que $\sin(\,)$ soit extremal.

$\boxed{T_n = \frac{\pi}{w_0}\left(n + \frac{1}{2}\right)}$ 1

$\frac{\varepsilon(t_f)}{\varepsilon(T_0)} = 0,1 \iff e^{-\frac{w_0}{2Q}(t_f - T_0)} = \frac{1}{10}$

$\iff \boxed{t_f - T_0 = \frac{2Q}{w_0}\ln 10}$

en notant $t_f = \frac{\pi}{w_0}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$T_0 = \frac{\pi}{2w_0}$

alors $\frac{\pi}{w_0}x = \frac{2Q}{w_0}\ln 10$

et $\boxed{x = \frac{2Q}{\pi}\ln 10}$ 2

nb oscill° vaut $E(x)$ (partie entière)

AN : $\boxed{n = E(x) = E\left[\frac{20}{\pi}\ln 10\right] = 7}$ 1

11. [2] syst : patin masse m_p

$\underbrace{m_p \vec{a}}_{\vec{0}} = \vec{R} + \underbrace{m_p \vec{g}}_{\vec{0}} + k(e - e_0)\vec{u_z} - f\dot{e}\vec{u_z}$ car $m_p = 0$.

l'énoncé ne le dit pas clairement mais c'est physiqt évident

$$\boxed{\vec{R} = (-k\varepsilon + f\dot\varepsilon)\vec{u_z}}$$

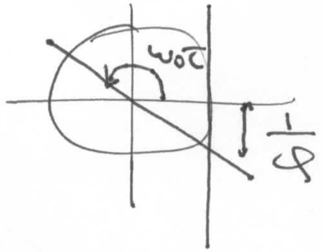
12. $\sin(\omega_0 \tau) + \frac{1}{Q}\cos(\omega_0 \tau) = 0$ $\boxed{2}$

$\boxed{5}$

si $\cos(\omega_0 \tau) \neq 0$: $\tan(\omega_0 \tau) = -\frac{1}{Q}$

dessin cercle trigo :

condit° $\cos(\,) \neq 0$ est ok.



$\omega_0 \tau = \pi - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{Q}\right)$

$$\boxed{\tau = \frac{\pi}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{Q}\right)}$$

AN : $\tau = \frac{1}{\sqrt{\frac{2,6}{6,3\,10^{-6}}}}\left(\pi - \operatorname{atan}(0,2)\right)$

$\boxed{\tau = 4,6\ \text{ms}}$ correspond aux odg sur figure 3.

→ Comparons terme $\operatorname{atan}\left(\frac{1}{Q}\right)$ devant π,

$\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{1}{Q}\right)}{\pi} = \boxed{6\%}$ c'est l'erreur relative en négligeant terme 1er ordre en $\frac{1}{Q}$.

13. pb d'énoncé ...