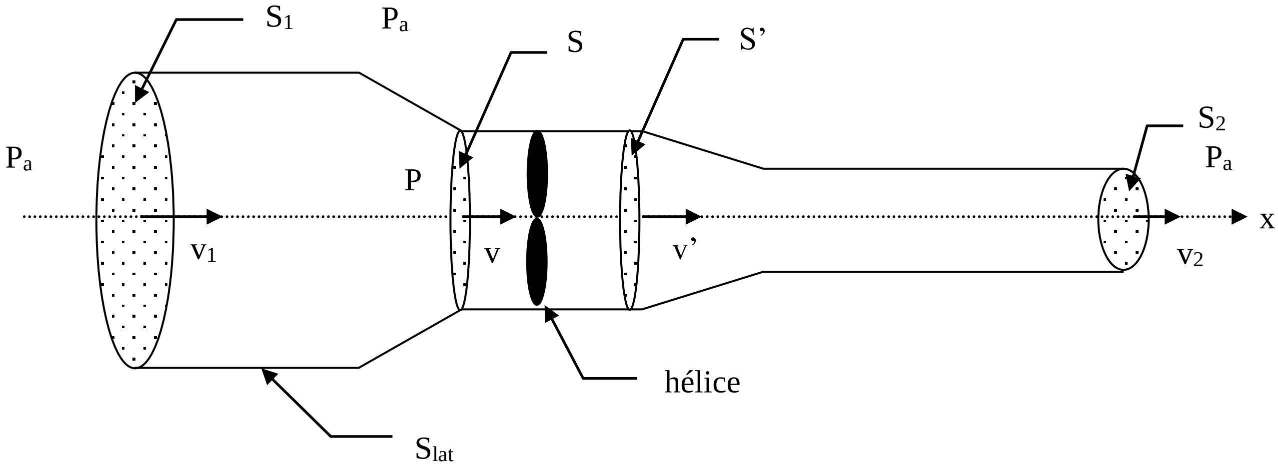
DM4 – Bilans macroscopiques (à rendre le vendredi 26/11)

Exercice : Fonctionnement d'une hélice (cas inverse de l'éolienne)



Une hélice animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Ox est plongée dans un fluide parfait, incompressible de masse volumique µ. L'étude est faite dans un référentiel galiléen R lié à l'axe de l'hélice ; dans ce référentiel, l'écoulement est stationnaire. On négligera l'influence de la pesanteur.

On considère un tube de courant possédant la symétrie de révolution autour de Ox et s'appuyant sur les pales de l'hélice. Ce tube de courant définit une surface fermée, constituée de la surface latérale du tube S_{lat} et des sections droites amont et aval S_1 et S_2. La pression à l'extérieur de ce tube de courant est uniforme et égale à la pression ambiante P_a.
Sur la surface S_1, la vitesse du fluide est uniforme et égale à $v_1\overrightarrow{u_x}$. Sur S_2, elle est égale à $v_2\overrightarrow{u_x}$.

Au voisinage de l'hélice, on considère deux sections S et S' d'aires sensiblement égales S ≈ S' :
- sur la surface S, la vitesse est $v\,\overrightarrow{u_x}$ et la pression P.
- sur la surface S', la vitesse est $v'\overrightarrow{u_x}$ et la pression P'.

Au voisinage proche de l'hélice, entre S et S', l'écoulement est perturbé, et il existe une discontinuité de la pression de part et d'autre de l'hélice.

1. Exprimer la pression P en fonction de P_a, µ, v_1 et v
Donner une expression analogue pour P' en fonction de P_a, µ, v_2 et v'.

On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide.

2. Montrer que $v \approx v'$.
En effectuant un bilan de quantité de mouvement dans le volume compris entre S et S', exprimer $\vec{F}$ en fonction de S, µ, v_1 et v_2.

3. En raisonnant cette fois dans le volume compris entre S_1 et S_2, obtenir une deuxième expression de $\vec{F}$ en fonction de v_1, v_2 et du débit massique $D_m = \mu S v$.

4. Déduire de ce qui précède, une relation simple entre v, v_1 et v_2.

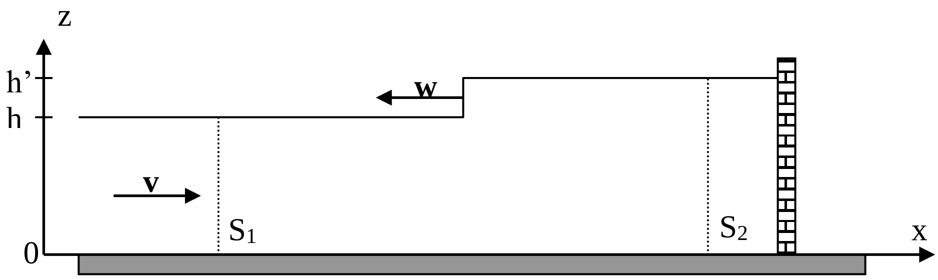
5. **(à traiter après chap.3 cours bilans)** En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à un volume de fluide bien choisi, déterminer la puissance $\mathscr{P}$ fournie par l'hélice au fluide, en donnant le résultat :
- dans un premier temps en fonction de D_m et des vitesses v_1 et v_2
- puis dans un second temps en fonction de $\vec{F}$ et $\vec{v}$

6. Vérifier le signe de $\mathscr{P}$ et justifier l'allure du tube de courant représenté en début d'énoncé.

7. Que faudrait-il modifier dans les raisonnements menés au cours de cet exercice si l'on étudiait une éolienne, plutôt qu'une hélice ?

Exercice : Ressaut hydraulique

Un canal de largeur L est obstrué par une paroi verticale (fermeture « brutale » d'une écluse). Une vague remonte alors le canal à une célérité w dans le référentiel terrestre.
La hauteur d'eau en amont du ressaut est h, et la vitesse du courant est v. En aval du ressaut, la hauteur d'eau est h' et la vitesse nulle. Les grandeurs h, h' et v sont constantes.
On se place dans le référentiel lié à la vague, supposé galiléen (car en TRU dans le référentiel terrestre). Dans ce référentiel, l'écoulement est stationnaire.
On étudie le système ouvert (S) de fluide délimité par les sections (en pointillés) amont S_1 et aval S_2, sections fixes dans le référentiel d'étude. Pour simplifier, on supposera que le front de la vague



est vertical.

1. Quelle est la vitesse du fluide entrant dans (S) au niveau de S_1, et celle en ressortant au niveau de S_2 ?
2. En traduisant la conservation de la masse, établir une relation entre v, w, h et h'.
3. Définir un système fermé (S^*) approprié, et montrer que la variation de la composante horizontale de sa quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{dP_x^*}{dt} = -\rho L h \times g(v, w)$$

où g(v,w) est une fonction à expliciter.
4. La pression étant P_0 à la surface du fluide, calculer la pression régnant dans l'eau en amont puis en aval du ressaut.
5. Que vaut la résultante *horizontale* des forces de pression sur le système (S^*) ? En déduire l'expression de la résultante des forces extérieures s'appliquant sur (S) en fonction de ρ, g, L, h et h'.
6. En déduire alors que h(v+w)v = ½.g.f(h,h') où f(h,h') est une fonction à expliciter.
7. En déduire la célérité de la vague en fonctionde g, h et h'. Que vaut-elle si h ≈ h' ?