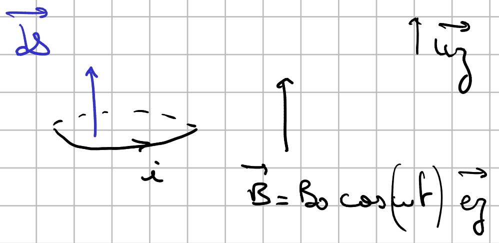
Corrigé des exos de cours d'induct°

2.3.

→ orientat° i, puis $\vec{dS}$

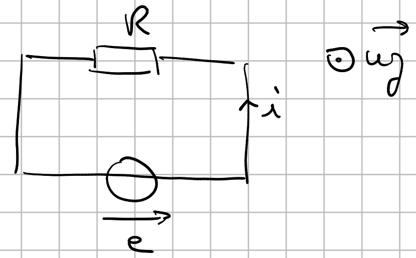


$$\phi = \iint_{S_{spire}} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint_{S} B_0 \cos(\omega t)\,\vec{u_z}\cdot dS\,\vec{u_z}$$

$$\phi = B_0 \cos(\omega t)\,\pi a^2$$

Or $e = -\frac{d\phi}{dt}$ $\Rightarrow$ $\boxed{e = B_0 \omega \sin(\omega t)\,\pi a^2}$

→ Sch. équivalent de la spire :



Loi maille : $e = Ri$

d'où $\boxed{i = \frac{B_0 \omega}{R}\pi a^2 \sin(\omega t)}$

→ Chp $\vec{B}$ extérieur est créé par un dispositif non-précisé.
Le courant i qu'il induit dans la spire génère égalt un chp magn^{q} : " $\vec{B}$induit ".
Dir° et sens de Binduit donnés par règle main droite :

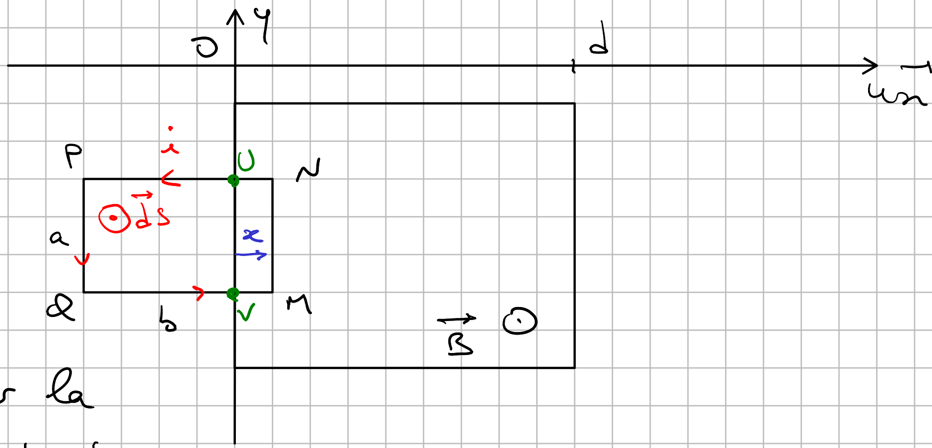
ou

Cas $i > 0$
(sens réel deviné ici)

Cas $i < 0$ (sens réel deviné)

<u>Discuss°</u> : Aux 1ers instants ($t \gtrsim 0$), $\vec{B}\cdot\vec{u_z}$ extérieur ↘.
Quant à i induit, il est > 0, donc $\vec{B}$induit $\cdot \vec{u_z} > 0$
On constate donc que $\vec{B}$induit modère la baisse de $\vec{B}$ext.
C'est une illustrat° de la loi de Lenz.

2.4. $\vec{v_0} = v_0 \vec{u_x}$



→ ϕ à travers cadre va varier → fém → i induit → $\vec{F}$laplace

Loi Lenz nous dit que $\vec{F}$laplace va modérer la cause de l'inductº ($\nearrow \phi$ à cause mvt cadre) = $\vec{F}$laplace va freiner le cadre.

→ x repère la positº du segment MN. $\dot{x}(t) > 0$ donc $= \|\vec{v}\|$ ("v")

PFD sur cadre dans Rgal (pas de pesanteur):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{laplace} \qquad \text{avec} \qquad \vec{F}_{laplace} = \oint_{cadre} i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$$

On oriente i sur le dessin (au hasard). Puis $\vec{dS}$ cadre avec main droite.

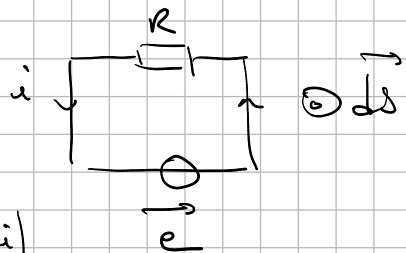
Pour avec la force, il nous faut i induit. Cherchons d'abord la fém.

Loi Faraday: $e = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \iint_{cadre} \vec{B}\cdot\vec{dS} = Bax$.

d'où fém $\boxed{e = -Bav}$

Puis schéma équivalent cadre:

loi maille $i = \frac{e}{R}$ $\quad \boxed{i = -\frac{Bav}{R} \;{}_{<0}}$



Revenons à $\vec{F}$laplace. (NB: sens $\vec{dl}$ donné par i)

$$\oint i\,\vec{dl}\wedge\vec{B} = \int_V^M + \int_M^N + \int_N^U = iaB\,\vec{u_x}$$

(Se freine, car $i<0$!)

se compensent: m̂ i, m̂ longueur, mais $\vec{dl}\wedge\vec{B}$ opposés

PFD selon $\vec{u_x}$: $m\frac{dv}{dt} = -(aB)^2\frac{v}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \alpha v = 0}$

→ Rq : on peut exprimer $v(t)$, puis $x(t)$, puis $t(x)$, puis $v(x)$

Mais ici énoncé veut un chgt de variable : $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$

Dans Eq diff : $\frac{dv}{dx} \times v + \alpha v = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dx} + \alpha = 0}$

D'où $v(x) = -\alpha x + \underbrace{C^{te}}_{\to v_0}$ car $v(x=0) = v_0$.

$$\boxed{v(x) = v_0 - \alpha x}$$

→ $v_1 = v(x=a)$ donc $\boxed{v_1 = v_0 - \alpha a}$

Cadre pénètre entièrement si $v_1 \geq 0$, donc $\boxed{v_0 \geq \alpha a}$

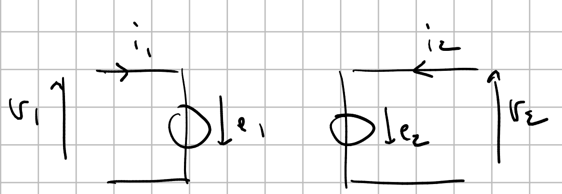
→ $\boxed{P_{Lap} = \vec{F}_{Lap} \cdot \vec{v} = iaBv}$

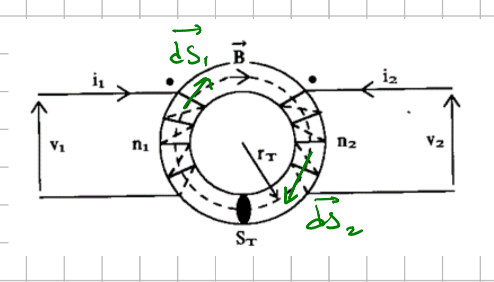
→ $P_{\text{fournie par fém}} = ei$ (car conv° géné.) $\boxed{P_{fém} = -Bavi}$

CCl° : $\boxed{P_{Lap} + P_{fém} = 0}$

NB : c'est un résultat g^al, qui traduit la conversion (parfaite en l'absence de φ^n dissipatifs) électromécanique.

3.8. Sch. équivalents des 2 bobinages :





$v_1 = -e_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = n_1 \frac{d\phi}{dt}$ → φ dans une seule spire

$v_2 = -e_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = n_2 \frac{d\phi}{dt}$ → c'est bien le m̂ φ (et pas −φ) car les $\vec{dS}$ des deux bobines sont dans le "m̂ sens" que $\vec{B}$ } cf. dessin

$$\boxed{\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1}}$$

tous les flux à travers les spires sont égaux car les ldc $\vec{B}$ sont parfaitt canalisés par fer

$$\rightarrow \begin{cases} v_1 = -e_1 = \dfrac{d\phi_1}{dt} & \text{avec } \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ v_2 = -e_2 = \dfrac{d\phi_2}{dt} & \text{avec } \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$$

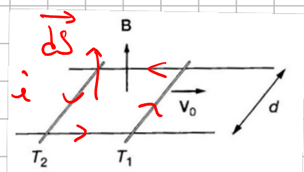
donc $\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$ Or $n_1 v_2 = n_2 v_1 \quad \forall (i_1, i_2)$

$$\Rightarrow n_1 L_2 \frac{di_2}{dt} + M n_1 \frac{di_1}{dt} = n_2 L_1 \frac{di_1}{dt} + n_2 M \frac{di_2}{dt} \quad \forall (i_1, i_2)$$

$$\Rightarrow \frac{di_2}{dt}(n_1 L_2 - n_2 M) + (M n_1 - n_2 L_1)\frac{di_1}{dt} = 0 \quad \underline{\forall (i_1, i_2)}$$

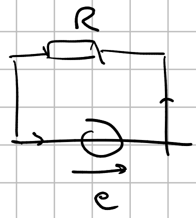
d'où $\begin{cases} n_1 L_2 - n_2 M = 0 & \rightarrow M = \dfrac{n_1}{n_2} L_2 \\ M n_1 - n_2 L_1 = 0 & \rightarrow M = \dfrac{n_2}{n_1} L_1 \end{cases} \Big\} \otimes \quad \boxed{M^2 = L_1 L_2}$

4.1.



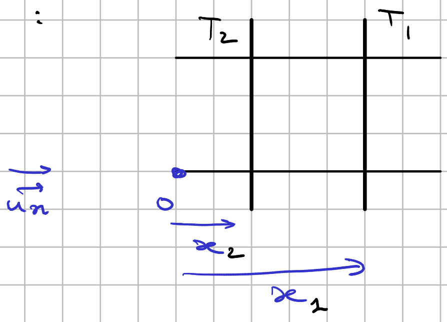
→ Mvt de T_1 modifie le flux ϕ. Loi Lenz prévoit que les csq vont modérer cette cause :
| T_1 va ralentir pour modérer la croissance de la surface
| T_2 va aller de l'avant pour modérer ______

→ i orienté sur dessin, puis $\vec{dS}$. Sch. équiv. :



$\odot \vec{dS}$

$i = \dfrac{e}{R}$ avec $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$. Pour exprimer surface S, il faut repérer les posit° des tiges :



$S = (x_1 - x_2) \times d$

d'où $\boxed{i = \dfrac{Bd}{R}(v_2 - v_1)}$ car $\dot{x}_1 > 0$, $\dot{x}_2 > 0$

notat° "v_1, v_2" ok

→ PFD sur tige 1 selon $\vec{u_x}$: $m \frac{dv_1}{dt} \vec{u_x} = \int_{T_1} i \vec{dl} \wedge \vec{B}$

↳ orienté par i

$$= i d B \vec{u_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv_1}{dt} + \frac{(Bd)^2}{R}(v_1 - v_2) = 0}$$

PFD sur tige T_2 : $m \frac{dv_2}{dt} \vec{u_x} = \int_{T_2} i \vec{dl} \wedge \vec{B} = -i d B \vec{u_x}$

$$\boxed{\frac{dv_2}{dt} + \frac{(Bd)^2}{R}(v_2 - v_1) = 0}$$

→ Faisons la somme : $\frac{d}{dt}(v_1 + v_2) = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 = C^{te}$

$v_0 + 0$ à $t=0$

$$\boxed{v_1(t) + v_2(t) = v_0}$$

Faisons la diffce : $\frac{d}{dt}\underbrace{(v_1 - v_2)}_{D} - \overbrace{\frac{2(Bd)^2}{R}}^{\text{"}\alpha\text{"}}\underbrace{(v_1 - v_2)}_{D} = 0$

$$\dot{D} + \alpha D = 0$$

d'où $D(t) = A e^{-\alpha t}$ Or $D(t=0) = v_0 = A$

donc $\boxed{v_1(t) - v_2(t) = v_0 e^{-\alpha t}}$

$v_1 = \frac{\text{somme} + \text{diff}}{2}$

$v_2 = \frac{\text{somme} - \text{diff}}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_0}{2}\left(1 + e^{-\alpha t}\right) \\ v_2 &= \frac{v_0}{2}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \end{aligned}}$$

v_1 part de v_0 et tend vers $\frac{v_0}{2}$

v_2 part de 0 et tend vers $\frac{v_0}{2}$

qd $t \gg \frac{1}{\alpha}$, tiges vont à la $\hat{m}$ vitesse, la surface ne varie plus, donc plus d'inductº. $E_c(t=0) = \frac{1}{2} m v_0^2$

(~5!)

$Ec_\infty = 2 \times \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{4} = \frac{1}{2} E_c(t=0)$ ... cf. pertes par effet Joule dans les tiges !