Chap.3 – Electrostatique : Potentiel électrique et propriétés topographiques

Intro : Toujours dans le cadre de l'électrostatique, on introduit ici la notion de *potentiel électrique*. Conséquence du caractère irrotationnel du champ électrique en régime statique, ce potentiel s'identifie au potentiel électrique introduit lors de l'étude *des circuits électriques*. On verra aussi qu'il est associé à *l'énergie potentielle* d'une charge placée dans un champ (dont son appellation de « potentiel »). On démontre enfin la relation entre tension et champ électrique, admise en première année et utilisée à plusieurs reprises dans les chapitres précédents.

La deuxième partie du chapitre traite des propriétés *topographiques* du champ électrique et du potentiel. On essaie d'interpréter les allures des *lignes de champ électriques* et des *surfaces équipotentielles*.

1. Potentiel électrostatique

1.1. Existence d'un potentiel scalaire (relation locale E – V)

Préliminaire mathématique

Tout champ vectoriel dont le rotationnel est nul en tout point de l'espace est un champ de gradient :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \exists\ f\ tq \quad \vec{A} = \overrightarrow{grad}(f)$$

Comme l'indique l'annexe d'analyse vectorielle distribuée en début d'année, le rotationnel du gradient d'un champ est toujours nul. C'est cette propriété qui est à l'origine du résultat énoncé ci-dessus.
En régime statique, on déduit de l'équation de Maxwell-Faraday l'existence d'un champ scalaire dont le champ électrique est le gradient (au signe près) : ce champ scalaire est nommé *le potentiel électrique*. La relation ci-dessous est une définition du champ scalaire $V(M)$ à partir du champ vectoriel $\vec{E}(M)$. Le choix de mettre un signe " $-$ " sera expliqué un peu plus loin.

<u>Définition du potentiel électrique V</u>

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} -\overrightarrow{grad}(\boldsymbol{V})$$

L'unité du potentiel est le Volt.
$V(M)$ s'identifie avec la notion de potentiel électrique introduite lors de l'étude des circuits électriques.

Le potentiel électrique est défini à partir de « sa dérivée » (i.e. de son gradient, qui est une sorte de généralisation de la dérivée pour les fonctions à plusieurs variables). Le champ électrique étant connu, il faut donc intégrer pour déterminer le potentiel. C'est pourquoi il n'est défini qu'à une constante près.

Le potentiel électrique n'est ***défini qu'à une constante près****. On la choisit* ***arbitrairement****.*
Ainsi ***seules les différences de potentiel*** *ont une* ***signification*** *physique et peuvent être* ***mesurées****.*
Dans les circuits électriques, le choix de cette constante revient à choisir un point comme masse du circuit !

1.2. <u>Equation de Poisson – Intérêt de la notion de potentiel</u>

- ❖ Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel électrostatique et le reliant à la distribution de charge

Cette équation s'appelle ***l'équation de Poisson***. Dans une zone de l'espace vide de charge, elle devient *l'équation de Laplace.*

Cette équation représente un des principaux intérêts de la notion de potentiel électrique en électrostatique :
- elle « condense » les deux équations de Maxwell vérifiée par le champ électrique en une seule
- elle concerne un champ scalaire… plus facile à manipuler mathématiquement qu'un champ vectoriel !!
- les conditions aux limites étant fixées, les math stipulent l'existence et l'unicité de la solution $V(M)$
- une fois l'équation résolue, $V(M)$ est connu et l'on peut en déduire le champ $\vec{E}(M)$ par simple dérivation

Sauf exercice Python pour illustrer les méthodes numériques de résolution d'équations différentielles (vous serez alors guidé par l'énoncé), nous n'utiliserons jamais l'équation de Poisson pour déterminer un champ électrique. Nous procéderons toujours en sens inverse : détermination du champ électrique par Gauss, puis intégration de la relation locale E – V pour déterminer le potentiel.

L'équation de Poisson est par contre très utile pour déterminer le champ électrique créé par des distributions plus réalistes (donc plus compliquées), pour lesquelles le Théorème de Gauss n'est pas utilisable. La distribution de charges étant connue, on résout l'équation de Poisson par ordinateur (résolution numérique). Une fois le potentiel connu, on dérive pour trouver le champ électrique.

<u>Théorème de superposition</u>
On remarque que l'équation de Poisson est linéaire : le potentiel créé par deux distributions de charge est la somme des potentiels créés par chacune des distributions. Mais on pouvait anticiper cela dès la définition du potentiel. Le gradient est un opérateur linéaire et le champ électrique vérifie lui-même le principe de superposition (cf. linéarité des équations de Maxwell).

1.3. <u>Différence de potentiel et circulation du champ électrique (relation intégrale E – V)</u>

La définition du potentiel est une équation locale (cf. les dérivées spatiales dans le gradient) : elle est valable en chaque point M de l'espace où le champ électrique est défini. On démontre ici l'équivalent intégral de la définition, qui permet de faire le lien entre la notion de *différence de potentiel* (vue en électrocinétique) et le *champ électrostatique* (vu en électromagnétisme et relié aux charges).

❖ Démontrer la relation intégrale ci-dessous (en montrant aussi qu'elle est indépendante du chemin suivi)

Relation intégrale entre E et V

*La **circulation du champ électrostatique** entre deux points* A *et* B *est **reliée à la ddp** entre ces deux points :*

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = V(A) - V(B)$$

*Cette relation est **indépendante du chemin suivi** pour intégrer de A vers B.*
Si *A* et *B* sont *confondus*, alors la *différence de potentielle est nulle*.

Application : On avait jusqu'à présent *admis* la relation entre le champ électrique et la tension dans le cas simple où le champ est uniforme entre A et B.

❖ Etablir à nouveau l'expression de la résistance électrique d'un tronçon de conducteur ohmique, de conductivité γ, de section circulaire S et de longueur L. On supposera uniformes le champ électrique ainsi que la densité de courant dans le conducteur

1.4. *(Rappel méca du point)* Energie potentielle associée à une force conservative

Propriété des forces conservatives

*Une force $\vec{F}$ est **conservative** ⇔ **il existe une énergie potentielle** E_p telle que :*

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$$

On dit que la force « dérive » d'une énergie potentielle.

✪ *(Complément culturel)* Démontrer cette propriété en utilisant le préliminaire mathématique du premier paragraphe et le Théorème de Stokes.

1.5. Energie potentielle d'une charge placée dans un champ électrique

Une charge ponctuelle q est placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$ créé par un dispositif non précisé.

❖ Montrer que la force électrique dérive d'une énergie potentielle, et donner l'expression de cette énergie potentielle

Energie potentielle d'une charge q placée dans un champ électrostatique

*Une charge ponctuelle q située en M dans un champ électrostatique extérieur possède **l'énergie potentielle***

$$E_{p_{elec}} = q \times V(M)$$

On comprend ici pourquoi le mot « potentiel » est utilisé pour nommer la grandeur $V(M)$. C'est ce lien avec le concept d'énergie potentielle (mécanique du point) qui justifie la présence du signe " $-$ " dans la définition du potentiel électrique (pour ne pas avoir de signe dans la relation ci-dessus).

En mécanique du point, on sait que l'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante arbitraire près. Cette constante n'ayant pas de signification physique (puisque seule la variation d'énergie potentielle apparaît dans le théorème de l'énergie mécanique). Il était d'ailleurs nécessaire de choisir une origine de l'énergie potentielle (origine du repère pour l'énergie potentielle de pesanteur par exemple).

Cela est cohérent avec la définition du potentiel électrique à une constante près. On notera alors que choisir un point comme masse d'un circuit est une opération analogue à fixer l'origine des altitudes dans un problème de mécanique du point soumis au champ de pesanteur.

On notera enfin qu'il est possible de construire le cours « en sens inverse » : définir le potentiel électrique à partir de l'énergie potentielle, et d'en déduire la relation locale entre champ électrique et potentiel (l'apparition du signe " $-$ " est alors plus naturelle).

Application : Accélération d'une particule chargée par un champ électrique uniforme, créé par deux armatures planes alimentées par une tension continue U (à sauter si déjà traitée au chap.1).

❖ Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour déterminer la vitesse de sortie de la particule (chargée positivement), celle-ci ayant été introduite à proximité de l'armature chargée positivement

1.6. *(Hors-Programme)* Existence d'un potentiel vecteur en régime variable

Tout ce qui a été dit dans ce chapitre est valable en régime statique. Il est intéressant de savoir ce qui est généralisable en régime variable. Les phénomènes électriques et magnétiques *ne sont plus découplés* et les charges électriques ne sont plus les seules sources de champ électrique. Les variations temporelles du champ magnétique sont aussi à prendre en compte : ***c'est le phénomène d'induction*** vu en première année et que nous approfondirons dans un chapitre suivant.

On montre ci-dessous qu'il est toujours possible de définir un potentiel électrique, mais il ne détermine pas à lui seul le champ électrique. Il faut ajouter un *potentiel vecteur* dont la présence dans la relation locale E – V reflète le couplage électrique – magnétique.

✪ L'annexe d'analyse vectorielle montre qu'un champ de divergence nul peut s'écrire comme le rotationnel d'un champ vectoriel. Montrer que le champ magnétique peut s'écrire $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$. Le champ $\vec{A}$ s'appelle le *potentiel vecteur*.

✪ En déduire par linéarité qu'il existe un champ scalaire V tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

En régime stationnaire (= statique en électromagnétisme), on retrouve la propriété du champ électrostatique : c'est un champ de gradient. Comme en statique, le potentiel scalaire est défini à une constante (de la position !) près : donc ici à une fonction du temps près. On la choisit arbitrairement (elle n'a pas de signification physique).

Remarque : A quoi servent les potentiels V et $\vec{A}$? Dans la théorie générale de l'électromagnétisme, il est en fait plus simple d'intégrer les équations différentielles vérifiées par les potentiels puis d'en déduire les expressions du champ électromagnétique, plutôt que de résoudre directement les équations de Maxwell.

1.7. Potentiel créé par une charge ponctuelle

❖ Le champ électrostatique créé par une telle distribution a déjà été déterminé au chapitre précédent. En déduire l'expression du potentiel électrique. On pourra fixer la constante d'intégration en choisissant de prendre le potentiel nul à l'infini.

On remarque que le potentiel électrostatique est défini partout dans l'espace *sauf au point où se situe la charge qui le génère* (idem pour le champ électrique). On remarque que le potentiel décroît en 1/r, alors que le champ électrique décroît en $1/r^2$.

1.8. Potentiel créé par un cylindre rectiligne infini uniformément chargé

❖ Le champ électrostatique créé par une telle distribution a déjà été déterminé au chapitre précédent. En déduire l'expression du potentiel électrique.

Une constante d'intégration est fixée arbitrairement (potentiel nul à l'infini par exemple).   *On **fixe les constantes d'intégration « supplémentaires »** en invoquant la **continuité spatiale du potentiel***

1.9. Potentiel créé par une sphère uniformément chargée

❖ Le champ électrostatique créé par une telle distribution a déjà été déterminé au chapitre précédent. En déduire l'expression du potentiel électrique.

2. Propriétés topographiques du champ et du potentiel

2.1. Propriétés des lignes de champ électrostatique

1. Deux lignes de champ *ne peuvent se couper* en un point *M* de l'espace *que* :
   - *si* le champ est nul en ce point *M*
   - ou *si* le champ n'est pas défini en ce point *M*

En dehors de ces deux cas particuliers, *deux lignes de champ ne peuvent pas se couper*.

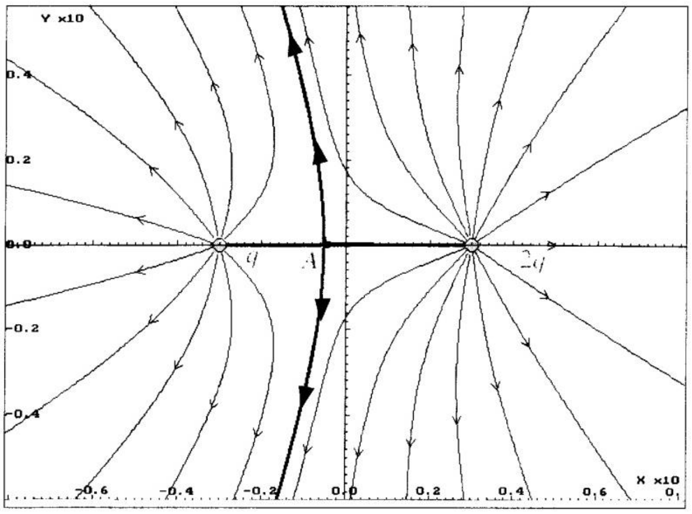
2. D'après l'expression du champ généré par une charge ponctuelle, les lignes de champ *divergent depuis une charge positive*, et *convergent vers une charge négative*.

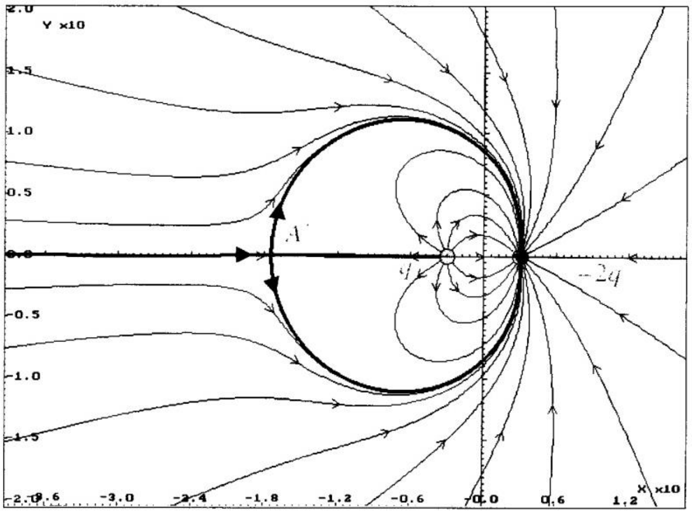
3. Une ligne de champ ne *peut pas se refermer sur elle-même*. En effet, le champ électrostatique est à circulation conservative. Une ligne de champ peut commencer sur une charge + et finir sur une charge -, ou commencer à l'infini et finir à l'infini.

Evasement des tubes de champ hors des zones chargées
*Dans les zones **vides de charges**, le champ électrique est à **flux conservatif**.*   ***L'évasement** d'un tube de champ reflète alors la **diminution** de la norme du champ.*

2.2. Exemples de cartes de champ

➢ Discuter des différents aspects discutés précédemment sur la carte de champ ci-dessous :





2.3. Surfaces équipotentielles et lignes de champ

Définition d'une surface équipotentielle

Une ***équipotentielle*** *est le* ***lieu des points*** *de* ***même potentiel****.*
A chaque valeur de potentiel V_0 correspond une équipotentielle définie par : $\boldsymbol{V(M) = V_0}$.

Deux surfaces équipotentielles différentes *ne peuvent donc pas se couper*.

Relation topographique entre lignes de champ et surface équipotentielle

Une ***ligne de champ*** *est localement* ***orthogonale*** *aux surfaces* ***équipotentielles****.*
Le potentiel ***décroît*** *le long d'une ligne de champ.*

- Démontrer cette affirmation, qui n'est vraie que si le champ est non nul au point M considéré

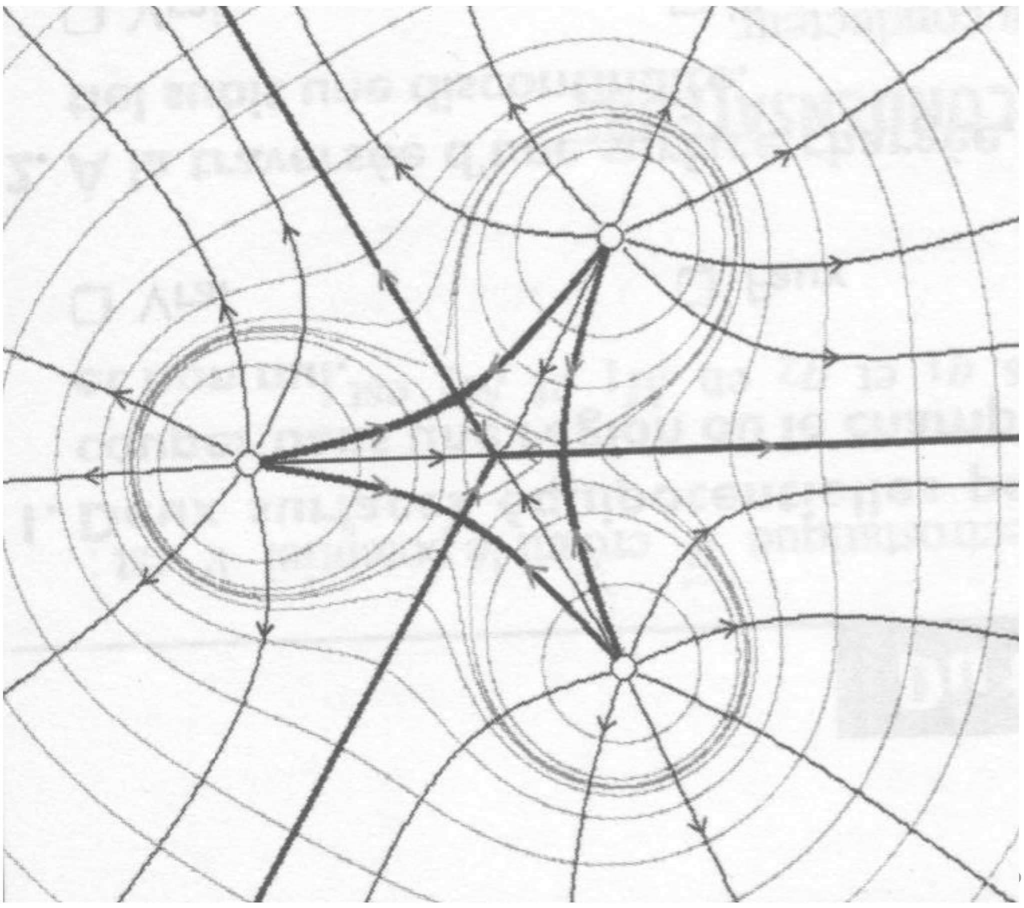
Il existe une forte analogie avec la lecture de carte topographique (carte IGN pour la randonnée).
Les analogues du potentiel et du champ électrique sont respectivement ***l'altitude*** *et* ***la ligne de plus grande pente****.*

Remarques supplémentaires :
Si les lignes de champ *convergent* en un point où le potentiel est défini, le potentiel admet un *minimum local en ce point*. Si les lignes de champ *divergent* à partir d'un point où le potentiel est défini, le potentiel admet un *maximum local en ce point*.

- Pour les trois exemples traités précédemment (charge ponctuelle, cylindre rectiligne infini uniformément chargé et sphère uniformément chargée), tracer l'allure des équipotentielles et des lignes de champ

2.4. Exemple de cartes de champ

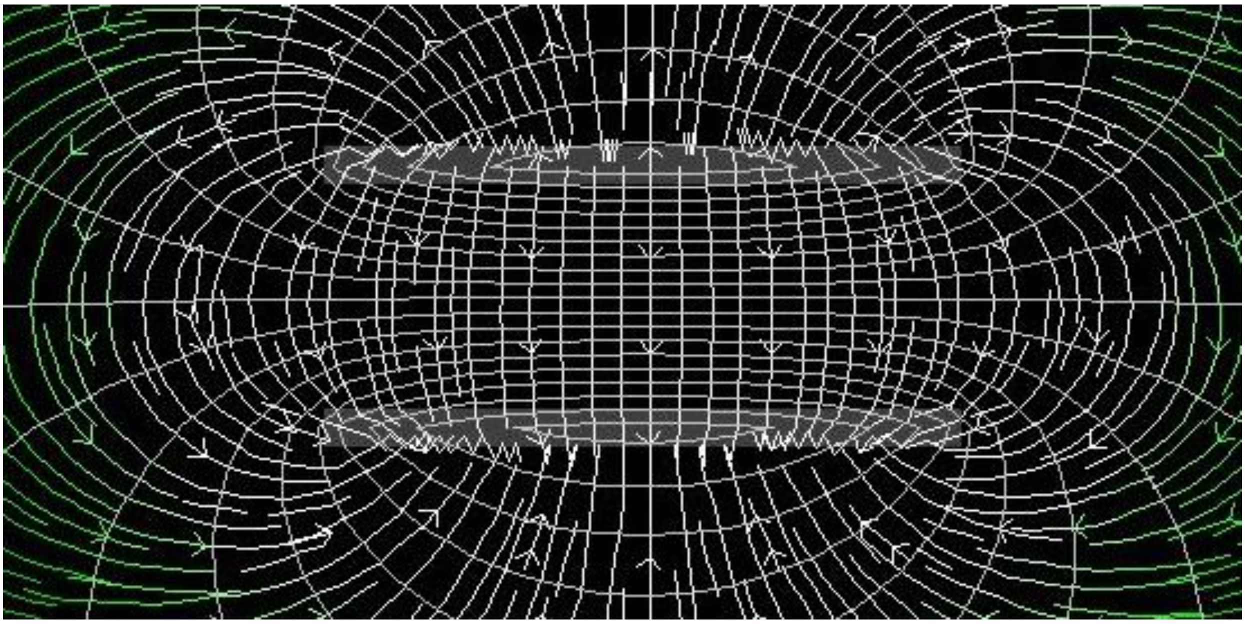
- Trois charges aux sommets d'un triangle équilatéral. Quels sont leur signe ? Que peut-on dire du champ et du potentiel au centre du triangle ? Trouver trois points de champ nul. Que peut-on dire du potentiel en ces points ? Identifier trois « cols de potentiel » en forme de selle de cheval (analogie avec les cols en montagne).



2.5. Evaluation du champ électrique à partir d'un réseau d'équipotentielles

Les lignes de champ et équipotentielle créées par un condensateur plan sont représentées ci-dessous. Elles ont été tracées à l'aide d'un logiciel de calcul numérique.

- Quel argument permet d'affirmer que le champ électrique est uniforme à l'intérieur du condensateur (sauf sur les bords) ?
- Quel argument permet d'affirmer que la différence de potentiel entre deux équipotentielles successives a été choisie constante pour le tracé ?
- En supposant que les deux armatures sont séparées de $1{,}6\ mm$ et que la différence de potentiel est de $16\ V$, estimer l'ordre de grandeur du champ électrique en différents points de la figure (notamment sur les bords de la figure)



2.6. Cartes de champ et de potentiels (exemples classiques traités en cours)

Potentiel scalaire électrique.	Relier l'existence du potentiel scalaire électrique au caractère irrotationnel de $\boldsymbol{E}$. Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrique.
Propriétés topographiques.	Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme de $\boldsymbol{E}$ en dehors des sources. Représenter les lignes de champ connaissant les surfaces équipotentielles et inversement. Évaluer le champ électrique à partir d'un réseau de surfaces équipotentielles.
Équation de Poisson.	Établir l'équation locale du deuxième ordre reliant le potentiel à la densité de charge.

Énergie potentielle électrique d'une charge ponctuelle dans un champ électrique extérieur.	Établir la relation $E_p = qV$. Appliquer la loi de l'énergie cinétique à une particule chargée dans un champ électrique.