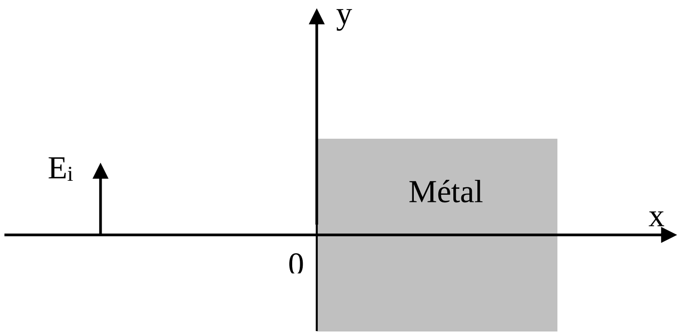
Exercices – OEM dans le vide

Exercice 1 : Réflexion d'une OEM sur un métal
Situation classique d'application du cours OEM dans le vide
Nécessité de l'existence d'une onde réfléchie pour assurer les conditions à la limite à l'interface du métal
Formation d'une onde stationnaire par superposition des OPPH incidente et réfléchie

On considère une onde plane monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement selon Oy et se propageant selon les x croissants dans le vide. Le plan x = 0 sépare le vide (milieu 1) d'un métal parfaitement conducteur (milieu 2) occupant le demi-espace x > 0.
On admet (sera vu en cours) que le ***champ électromagnétique est nul en tout point du métal****.*



- ❖ Donner l'écriture du champ $\vec{E_i}$ de cette OPPM incidente, en notation complexe
- ❖ En déduire l'expression complexe du champ $\vec{B_i}$, sans introduire de nouveaux paramètres

Si les relations de passage ont été vues (hors programme) :
- ✪ Rappeler les relations de passage du champ électromagnétique (math + schémas + mots)
- ✪ En déduire l'affirmation ci-dessous.

(Admis) La composante ***tangentielle*** *du champ électrique est* ***spatialement continue au niveau de l'interface*** $\boldsymbol{x = 0}$.

- ❖ Le champ incident vérifie-t-il cette condition de continuité ?
- ❖ En déduire l'existence nécessaire d'une onde réfléchie.

On admet que l'onde réfléchie à la même polarisation et la même pulsation que l'onde incidente.
- ❖ Donner l'écriture du champ électrique $\vec{E_r}$ de l'onde réfléchie, en notation complexe.
- ❖ Déterminer alors l'amplitude des champs $\vec{E_r}$ et $\vec{B_r}$

- ❖ Montrer que l'onde résultante dans le vide est une OS, les nœuds électriques étant des ventres magnétiques et inversement.
- ❖ Montrer que la puissance surfacique moyenne de l'onde totale est nulle en tout point

- ❖ Calculer le coefficient de réflexion en puissance :

$$R \overset{\text{def}}{=} \frac{\|\vec{\Pi}_r\|}{\|\vec{\Pi}_i\|}$$

- ❖ Connaissez-vous une application courante de la réflexion totale des OEM sur un métal ?

- ✪ Grâce aux relations de passage du champ magnétique, déterminer les courants surfaciques régnant à la surface du conducteur

Commentaires :
- les courants surfaciques sont créés par l'onde incidente, et génèrent l'onde réfléchie
- si l'on ne néglige pas « l'épaisseur de peau » (cf. chapitre à venir), i.e. si l'on tient compte de la pénétration de l'onde dans le conducteur, le coefficient de réflexion en puissance n'est alors plus égal à 1. Le champ électrique non-nul dans le conducteur s'accompagne d'effet Joule, qui dissipe l'énergie apportée par l'OEM au conducteur

Exercice 2 : OEM « dans le vide », mais située entre deux plaques conductrices

Etudier la structure d'OEM « presque dans le vide » : les conditions aux limites imposées par de la matière conductrice modifient la structure établie en cours (« vrai vide » vu en cours, car du vide partout !)

On considère une OEM dans le vide contrainte de se propager entre deux plaques conductrices. Ces deux conducteurs sont supposés parfaits et infiniment étendus. On peut montrer que les composantes du champ E en notation complexe doivent vérifier les écritures suivantes :

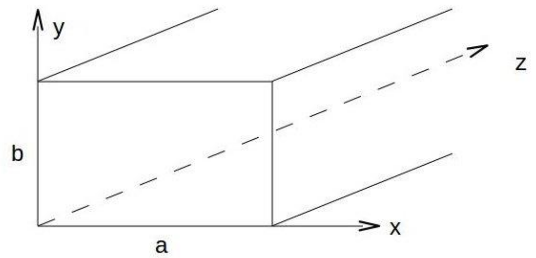
$$\begin{cases} \underline{E_x} = 0 \\ \underline{E_y} = E_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \exp\left(j(\omega t - kz)\right) \\ \underline{E_z} = \underline{\mu} E_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \exp\left(j(\omega t - kz)\right) \end{cases}$$

où k > 0

1. Déterminer µ tel que E vérifie bien les équations de Maxwell dans le vide. L'onde est-elle plane ?
2. Déterminer l'expression de k en fonction des données de l'énoncé. Pour quelles valeurs de pulsation ω l'onde est-elle progressive ?
2.bis. Pour les autres valeurs de ω, on peut essayer de voir ce que donnerait une « pulsation k imaginaire pure »… Quelle serait alors la nature de l'onde après retour en notation réelle ?
3. Dans le cas d'une onde progressive, déterminer E et B en notation réelle. L'onde est-elle transverse ? longitudinale ? Expliquer pourquoi on peut dire que la polarisation est « elliptique ».
4. Déterminer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

Exercice 3 : Guide d'onde rectangulaire (difficile)

- *Illustrer l'idée générale qu'une onde confinée est quantifiée, et démontrer l'expression admise à l'exo1*
- *Permet de s'exercer à des calculs plus compliqués (peu probable que cela tombe en PC, plutôt pour MP)*
- *Premier contact avec la propagation guidée des ondes (dispositif utilisé dans les fours micro-ondes par exemple)*



On considère un guide d'onde cylindrique d'axe z, à section droite rectangulaire, constitué de parois parfaitement conductrices incluses dans les plans d'équations x=0, x=a, y=0, y=b. Une OEM monochromatique se propage suivant l'axe des z. L'onde est transverse magnétique (B orthogonal à l'axe des z).

$$\vec{E} = E_x\overrightarrow{e_x} + E_y\overrightarrow{e_y} + E_z\overrightarrow{e_z}$$
$$\vec{B} = B_x\overrightarrow{e_x} + B_y\overrightarrow{e_y}$$
$$\underline{E_z}(x,y,z,t) = E_{0z}(x,y)\exp\left(j(k_g z - \omega t)\right)$$

où k_g est la pulsation spatiale de l'onde guidée.
1. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par E_z. En déduire que l'équation différentielle vérifiée est :

$$\frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial y^2} + k_c^2\,\underline{E_z} = 0$$

On exprimera k_c en fonction des données de l'énoncé.

2. On cherche $E_{0z}(x,y)$ sous forme de variables séparées : $E_{0z}(x,y) = f(x)g(y)$. Déterminer les EDiff vérifiées par f et g, en repérant deux termes constants, que l'on supposera du signe approprié pour que les conditions à la limites puissent être vérifiées par le champ électrique.

Les relations de passage sur une surface stipulent que la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée de la surface. Par ailleurs, dans des métaux considérés parfaitement conducteurs, le champ électrique est nul.

3. En déduire la valeur du champ électrique de l'onde sur les parois du guide d'onde.

4. Intégrer les EDiff puis, à partir des conditions aux limites précédentes, montrer que la solution est de la forme :

$$E_{0z} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp\left(j\left(k_g z - \omega t\right)\right)$$

où m et n sont des entiers.

4. Exprimer k_c en fonction de m, n, a et b.
5. Un couple de valeurs (m,n) caractérise un « mode » de propagation. Montrer que ω doit être supérieure à une valeur à déterminer pour que le mode (m,n) puisse se propager.

6. Déduire de la composante E_z, à l'aide des équations de Maxwell toutes les autres composantes de E et B, en supposant que leur dépendance en z et t sont du même type que E_z.

7. Déterminer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting. Le résultat est-il conforme à la direction de propagation de l'onde ?